CONCOURS D'ENTRÉE
À L'ÉCOLE DES INGÉNIEURS DE LA VILLE DE PARIS

1988

ÉPREUVE COMMUNE DE MATHÉMATIQUES

durée : 4 heures - coefficient : 8

Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{R})$) désigne l'ensemble des matrices (n,n) (resp. des matrices (n,n) inversibles). Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la matrice transposée, $\det M$ le déterminant de M, $\operatorname{tr} M$ la trace de M.

Dans tout le problème, on considèrera les ensembles suivants :

$\mathcal{R}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les éléments sont les matrices :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{où } \theta \text{ parcourt } \mathbb{R}.$$

$\mathcal{T}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les éléments sont les matrices :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \alpha \\ \sin\theta & \cos\theta & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } (\alpha, \beta, \theta) \text{ parcourt } \mathbb{R}^3.$$

$\mathcal{S}$ est l'ensemble des matrices symétriques $(3,3)$.

I - 1°/ a) Montrer que $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{T}$) est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ (resp. de $GL_3(\mathbb{R})$).

Calculer le déterminant d'une matrice R de $\mathcal{R}$ (resp. E de $\mathcal{T}$).

b) Soit ϕ l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à une matrice $(3,3)$ associe la matrice $(2,2)$ obtenue en supprimant la 3ème ligne et la 3ème colonne.

Montrer que $\phi(\mathcal{T}) = \mathcal{R}$, et que la restriction de ϕ à $\mathcal{T}$ définit un homomorphisme surjectif de groupes de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{R}$, qu'on notera φ.

2°/ a) Soient S un élément de $\mathcal{S}$ et E un élément de $\mathcal{T}$.

On pose $E * S = {}^t(E^{-1})\, S\, E^{-1}$.

Montrer que $E * S$ est symétrique, et que si E' est un autre élément de $\mathcal{T}$, $E' * (E * S) = (E'E) * S$.

b) Soient S_0 une matrice symétrique $(2,2)$ et R un élément de $\mathcal{R}$.

On pose $R * S_0 = {}^t(R^{-1})\, S_0\, R^{-1}$.

Montrer que $\varphi(E) * \phi(S) = \phi(E * S)$.

Montrer que $\det R * S_0 = \det S_0$

$\operatorname{tr} R * S_0 = \operatorname{tr} S_0$.

c) Soient $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ une matrice $(3,1)$ à coefficients réels et (E, S) un élément de $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$.

Montrer que ${}^tV S V = 0$ si et seulement si ${}^tV (E * S) V = 0$. (*)

(${}^tV$ est la transposée de V).

3°/ Soient S et S' deux matrices de $\mathcal{S}$. On dira que S et S' sont conjuguées s'il existe une matrice E de $\mathcal{T}$ telle que $S' = E * S$.

a) Montrer que la relation de conjugaison est une relation d'équivalence dans $\mathcal{S}$.

b) Montrer que toute matrice de $\mathcal{S}$ est conjuguée d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ où a, c, d, e, f sont des réels.

c) Pour $S = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$, calculer $E * S$ dans les deux cas suivants :

$$E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(*) Note d'édition : question erronée.

TSVP.

d) Soit S une matrice de $\mathcal{S}$ telle que $\det(\phi(S)) \neq 0$.

Montrer que S est conjuguée d'une matrice diagonale.

4°/ Soit S une matrice de $\mathcal{S}$ telle que $\det(\phi(S)) = 0$.

a) Montrer que si $\det S \neq 0$, S est conjuguée d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix}$, où a et e sont des réels.

b) Montrer que si $\det S = 0$, S est conjuguée d'une matrice de la forme décrite en 3° b/ avec :

Soit $c = d = e = 0$

Soit $a = d = e = f = 0$

II Soit $\mathbb{R}[T_1, \ldots, T_6]$ l'anneau des polynômes à coefficients réels à 6 indéterminées. A tout polynôme P de $\mathbb{R}[T_1, \ldots, T_6]$ on associe la fonction f_P de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ définie de la manière suivante :

si $S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ $\qquad f_P(S) = P(a, b, c, d, e, f)$.

Une telle fonction est appelée fonction polynomiale sur $\mathcal{S}$.

1°/ a) Montrer que l'application qui à P associe f_P est une bijection de $\mathbb{R}[T_1, \ldots, T_6]$ sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions polynomiales sur $\mathcal{S}$.

On identifiera désormais ces deux ensembles et pour toute matrice S de $\mathcal{S}$, on notera $P(S) = f_P(S)$.

b) On définit pour la suite du problème les fonctions P_1, P_2, P_3 par :

$\forall S \in \mathcal{S}$ $\qquad P_1(S) = \det \phi(S)$

$P_2(S) = \operatorname{tr} \phi(S)$

$P_3(S) = \det S$

Montrer que P_1, P_2, P_3 sont des fonctions polynomiales.

2°/ Un élément P de $\mathcal{P}$ est dit invariant par $\mathcal{T}$ si

$$\forall E \in \mathcal{T}, \forall S \in \mathcal{S}, \quad P(E * S) = P(S).$$

a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{I}$ des polynômes invariants est un anneau unitaire.

b) Montrer que P_1, P_2, P_3 sont invariants.

c) Soit $S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix}$ où a et e sont des réels.

Calculer $P_1(S)$, $P_2(S)$, $P_3(S)$.

d) Soit P un élément de $\mathcal{P}$. S'il existe un entier $m \geq 1$, un polynôme F de l'anneau de polynômes $\mathbb{R}[X, Y, Z]$, tels que $P_1^m P = F(P_1, P_2, P_3)$, montrer en utilisant II 2° c) que F est divisible par X.

En déduire qu'il existe un polynôme G de $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ tel que $P = G(P_1, P_2, P_3)$.

3°/ Soit τ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ définie par :

$$\tau(P) = P(X, 0, 0, Y, 0, Z).$$

a) Montrer que si P est invariant et si $\tau(P) = 0$, alors pour tout S de $\mathcal{S}$ tel que $P_1(S) \neq 0$, $P(S) = 0$.

b) En déduire que la restriction de τ à $\mathcal{I}$ est une injection.

4°/ Soit P un élément de $\mathcal{I}$.

a) Montrer que $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $P(\alpha, 0, 0, \beta, 0, \gamma) = P(\beta, 0, 0, \alpha, 0, \gamma)$.

b) En déduire que $\tau(P)$ est un polynôme en XY, $X+Y$, Z.

(On admettra le résultat suivant : si $G \in \mathbb{R}[X, Y]$ vérifie $G(X, Y) = G(Y, X)$, alors G est un polynôme en $X+Y$ et XY).

c) Calculer $\tau(P_1)$, $\tau(P_2)$, $\tau(P_3)$.

d) En déduire, en utilisant II 2° d), que P est un polynôme en P_1, P_2, P_3.

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail